УДК 515.2

# ДОСЛІДЖЕННЯ ЛІНІЇ ПЕРЕТИНУ КРУГОВОГО КОНУСА З ЕЛІПТИЧНИМ ЦИЛІНДРОМ

*І. Ніщенко, к.ф.-м.н., В. Виходець, к.т.н., Б. Качмар, к.т.н.*
*Львівський національний аграрний університет*

**Ключові слова:** аналітична геометрія, циклічні поверхні, конічні та еліптичні поверхні, конструювання, круговий конус, еліптичний циліндр, алгебраїчний аналіз, концентричні сфери, ексцентричні сфери, система координат.

На прикладі дослідження лінії перетину кругового конуса з еліптичним циліндром запропоновано аналітичний метод розв'язку задач на знаходження ліній взаємного перетину циклічних поверхонь. Запропонований метод дозволяє застосовувати результати розв'язку в проектуванні й конструюванні технічних деталей та архітектурних форм.

**Постановка проблеми.** Розв'язок багатьох інженерних задач, які виникають у проектуванні та конструюванні складних за конструкцією та геометричними формами деталей, до складу яких входять поверхні обертання та еліптичні поверхні, базується на застосуванні графічних методів побудови їх ліній взаємного перетину.

Графічні методи побудов ліній взаємного перетину із застосуванням посередників − січних площин, концентричних та ексцентричних сфер, циліндричних та конічних поверхонь [4] − обмежують можливість їх дослідження, тому що визначники поверхонь на кресленнях задаються постійними параметрами.

Широкого кола розв'язку прикладних задач досягають завдяки дослідженням геометричних форм та їх взаємного розташування в просторі за допомогою алгебраїчного розв'язку [1].

Аналітичний розв'язок задач на знаходження ліній взаємного перетину поверхонь другого порядку зводиться до опису поверхонь квадратними рівняннями в декартовій системі координат, розв'язку системи алгебраїчних рівнянь та отримання рівняння лінії їх взаємного перетину. Лінією перетину двох поверхонь другого порядку, в загальному випадку, є просторова крива четвертого порядку. У деяких випадках вона може розпадатися на дві плоскі криві другого порядку [2]. Змінюючи параметри системи рівнянь досліджуваних поверхонь, можна отримати рівняння лінії взаємного перетину для різних варіантів їх взаємного розташування.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** У публікаціях з аналітичної та вищої геометрії відсутні розділи дослідження ліній взаємного перетину циклічних поверхонь, до яких належать конічні та еліптичні поверхні, хоча розв'язок таких задач має практичний характер.

Графічні методи, які розглядаються в курсі нарисної геометрії, обмежуються розв'язком окремих задач, які виникають у проектуванні та конструюванні деталей машин та конструкцій.

**Постановка завдання.** У статті відтворено дослідження поверхонь другого порядку та розв'язок задачі побудови лінії взаємного перетину за допомогою алгебраїчного аналізу їх формоутворення.

**Виклад основного матеріалу.** Проведемо дослідження циклічних поверхонь та їх лінії взаємного перетину на прикладі поверхні кругового конуса та еліптичного циліндра (рис. 1).

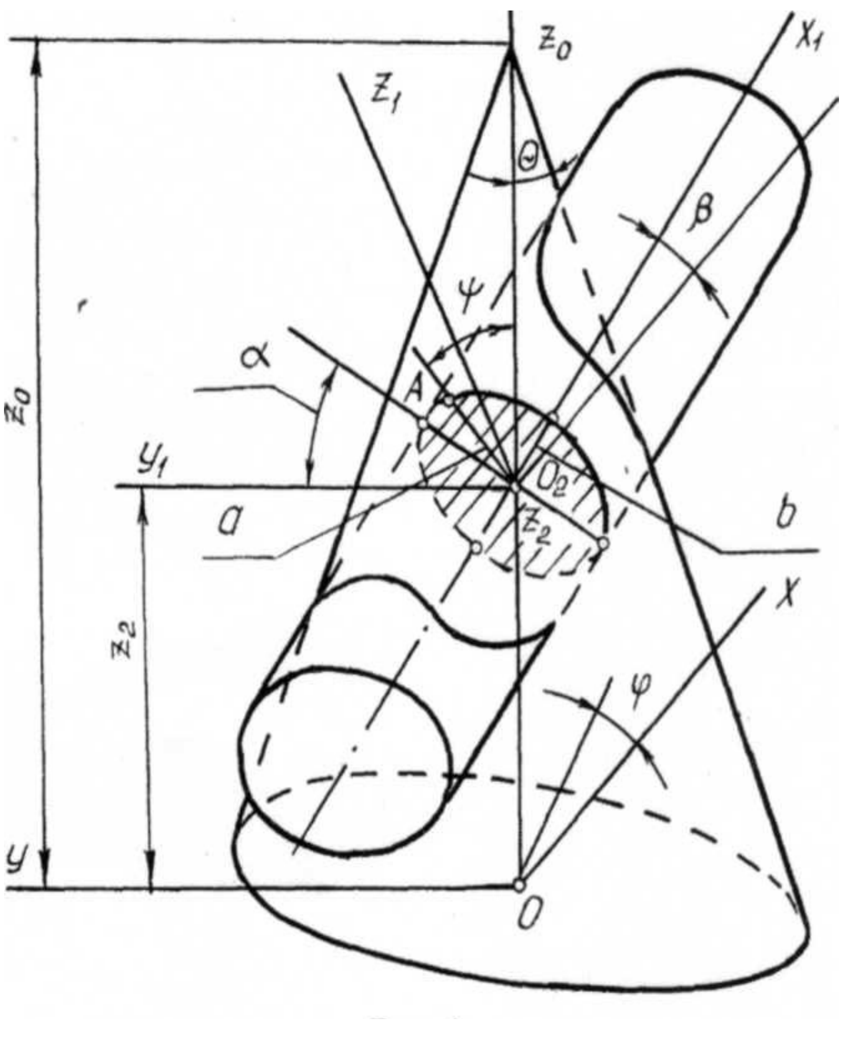

Рис. 1. Циклічні поверхні та їх лінії взаємного перетину на прикладі поверхні кругового конуса та еліптичного циліндра.

Задано круговий конус, вісь якого збігається з віссю *OZ,* а його вершина знаходиться в точці з аплікатою $Z_0$. Кут між віссю конуса та його твірною дорівнює $\Theta$.

Рівняння поверхні конуса в декартовій системі координат має вигляд:

$$Z = Z_0 - \sqrt{X^2 + Y^2}\, ctg\Theta \tag{1}$$

або в параметричній формі:

$$\begin{cases} X = \rho \cos\varphi , \\ Y = \rho \sin\varphi , \\ Z = Z_0 - \rho\, ctg\Theta \end{cases} \tag{2}$$

Параметри $\varphi$ та $\rho$ змінюються в таких межах:

$$0 \le \varphi \le 2\pi , \ 0 \le \rho \le \infty .$$

Задано еліптичний циліндр, вісь якого $X_1$ знаходиться у площині $XOZ,$ перетинає вісь $Z$ у точці $O_2$ з аплікатою $Z_2$ та нахилена до осі $OX$ під кутом $\angle \beta$ ; $\psi$ − змінний кут між віссю $Z$ та довільним променем $O_1A$. Нормальний переріз циліндра − еліпс з півосями „$a$" і „$b$", причому головні осі еліпса утворюють з осями $Y_1$ та $Z_1$ кут $\alpha$.

Тоді рівняння еліптичного циліндра в системі координат $O_2X_1Y_1Z_1$ у параметричній формі можна записати:

$$\begin{cases} -\infty < X_1 < +\infty , \ 0 \le \psi \le 2\pi ; \\ Y_1 = b\sin\psi \cos\alpha + a\cos\psi \sin\alpha \\ Z_1 = a\cos\psi \cos\alpha + b\sin\psi \sin\alpha \end{cases} \tag{3}$$

Враховуючи відомі формули залежності між координатами точки за паралельного переносу та повороту системи координат, одержимо:

$$\begin{cases} X_1 = X\cos\beta + (Z - Z_2)\sin\beta ; \\ Z_1 = (Z - Z_2)\cos\beta - \sin\beta ; \\ Y_1 = Y. \end{cases} \tag{4}$$

Підставивши в ліву частину формули (4) вирази зі співвідношень (3), а у праву − вирази з формули (2), одержимо систему двох рівнянь, з яких можна виразити $\rho$ і $\varphi$ через параметр $\psi,$ а саме:

$$\begin{cases} \rho \sin\varphi = b\sin\psi \cos\alpha + a\cos\psi \sin\alpha \\ \rho\,(ctg\Theta \cos\beta + \cos\varphi \sin\beta ) = (Z_0 - Z_2)\cos\beta - (a\cos\psi \cos\alpha - b\sin\psi \sin\alpha ) \end{cases} \tag{5}$$

Виключивши із цієї системи невідому $\rho$ (при цьому використано відомі формули $\cos\varphi = \cos^2\frac{\varphi}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2}, \quad \sin\varphi = 2\cos\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2}$ та

$1 = \cos^2\frac{\varphi}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2}$, одержимо рівняння:

$$Ud_2 tg^2\frac{\varphi}{2} - 2C_1 d_1 tg\frac{\varphi}{2} + Ud_3 = 0, \tag{6}$$

де
$$C_1(\psi) = (Z_0 - Z_2)\cos\beta - (a\cos\psi\cos\alpha - b\sin\psi\sin\alpha),$$
$$d_1 = \sin\Theta, \quad d_2 = \cos(\Theta + \beta),$$
$$d_3 = \cos(\Theta - \beta),$$
$$U(\psi) = b\sin\psi\cos\alpha + a\cos\psi\sin\alpha.$$

Знаходимо корені квадратного рівняння (6):

$$t_1(\psi) = \frac{C_1 d_1 + \sqrt{(C_1 d_1)^2 - d_2 d_3 U^2}}{Ud_2},$$
$$t_2(\psi) = \frac{C_1 d_1 - \sqrt{(C_1 d_1)^2 - d_2 d_3 U^2}}{Ud_2}. \tag{7}$$

Корінь $t_1$ відповідає вхідній просторовій кривій $(X<0)$ лінії перетину еліптичного циліндра з круговим конусом, а $t_2$ – вихідній кривій $(X>0)$. Тоді з рівнянь (5) визначаємо залежність $p$ від параметра $\psi$:

$$\rho_1(\psi) = \frac{C_1 d_1 + \left[1 + t_1^2(\psi)\right]}{d_3 + d_2 t_1^2(\psi)},$$
$$\rho_2(\psi) = \frac{C_1 d_1 + \left[1 + t_2^2(\psi)\right]}{d_3 + d_2 t_2^2(\psi)}. \tag{8}$$

Підставивши ці вирази у формули (2) і (3), одержимо в параметричній формі рівняння ліній перетину еліптичного циліндра з круговим конусом:

$$\begin{cases} X = \rho_2(\psi)\dfrac{1 - tg_2^2(\psi)}{1 + tg_2^2(\psi)} \\ Y = b\sin\psi\cos\alpha + a\cos\psi\sin\alpha, \\ Z = Z_0 - \rho_2(\psi) ctg\Theta \end{cases} \quad X > 0; 0 \le \psi \le 2\pi \tag{9}$$

$$\begin{cases} X = \rho_1(\psi)\dfrac{1 - tg_1^2(\psi)}{1 + tg_1^2(\psi)} \\ Y = b\sin\psi\cos\alpha + a\cos\psi\sin\alpha, \\ Z = Z_0 - \rho_1(\psi)ctg\Theta \end{cases} \qquad X < 0;\ 0 \le \psi \le 2\pi \qquad (10)$$

Для наочної реалізації отриманих співвідношень складено програму в середовищі *MATLAB*, яка дозволяє будувати зазначені вище фігури і лінію їх перетину.

На рис. 2, а, б, в показані різні положення еліптичного циліндра ($\alpha=0;\ \pi/2;\ -\pi/4$). Інші величини мають такі значення:

$\Theta=\pi/8;\ \beta=\pi/9;\ Z_0=40;\ Z_2=20;\ a=7;\ b=3$.

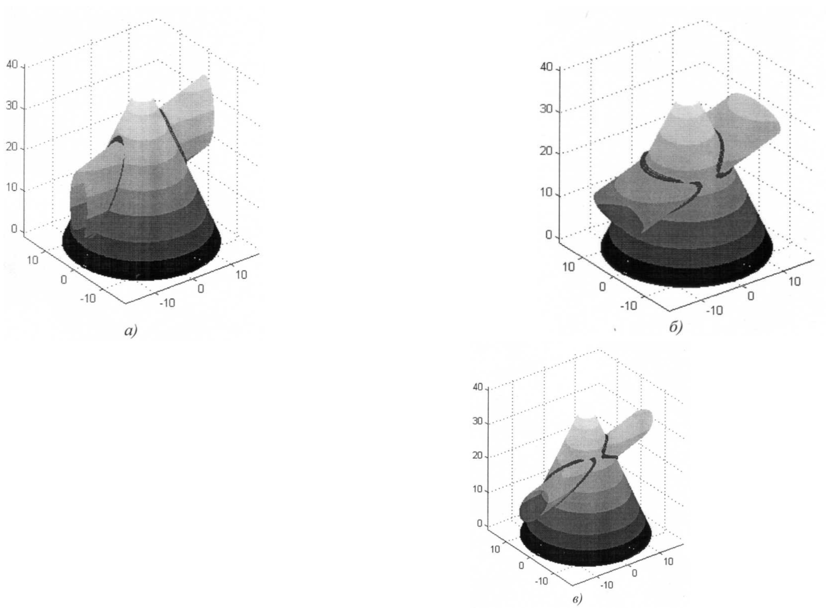

Рис. 2. Рівні положення еліптичного циліндра.

**Висновки.** Дослідження циклічних поверхонь і побудови їх лінії взаємного перетину за допомогою алгебраїчного аналізу дає змогу реалізувати результати через розробкиу програм для графічного відображення.

**Бібліографічний список**


1. Привалов И. И. Аналитическая геометрия / И. И. Привалов. − М. : Наука, 1966. – 272 с.
2. Маневич В. А. Аналитическая геометрия с теорией изображений / В. А. Маневич, И. И. Котов, А. Р. Венгрин. – М. : Высшая школа, 1969. – 303 с.
3. Фиников С. П. Аналитическая геометрия / С. П. Фиников. − М. : Учпедгиз, 1952. – 384 с.

4. Короев Ю. И. Начертательная геометрия / Ю. И. Короев. − М. : Стройиздат, 1987. − 319 с.
5. Винницкий И. Я. Начертательная геометрия / И. Я. Винницкий. − М. : Высшая школа, 1975. − 280 с.

**Нищенко И., Выходец В., Качмар Б. Исследование линии пересечения кругового конуса с эллиптическим цилиндром**

На примере исследования линии пересечения кругового конуса с эллиптическим цилиндром предложен аналитический метод решения задач на определение линий взаимного пересечения циклических поверхностей. Этот метод позволяет применять результаты решения в проектировании и конструировании технических деталей и архитектурных форм.

**Ключевые слова:** аналитическая геометрия, циклические поверхности, конические и эллиптические поверхности, конструирование, круговой конус, эллиптический цилиндр, алгебраический анализ, концентрические сферы, эксцентрические сферы, система координат.

**Nischenko I., Vikhodets' V., Kachmar B. Research of crossing line of abrupt with elliptic cylinder**

In the article as an example of research of crossing line of abrupt with an elliptic cylinder the analytical method of tasks decision on finding of mutual crossing lines of cyclic surfaces is offered. The offered method enables application of results of decision at planning and constructing of technical details and architectural forms.

**Key words:** analytical geometry, cyclic surfaces, conical and elliptic surfaces, constructing, abrupt, elliptic cylinder, analysis of algebra, concentric spheres, eccentric spheres, system of coordinates.